Формулировка: Докажем, что сумма квадратов площадей 3-х прямоугольных треугольников, имеющих общую вершину при прямых углах и являющихся гранями тетраэдра равна квадрату площади 4-ой грани этого тетраэдра.

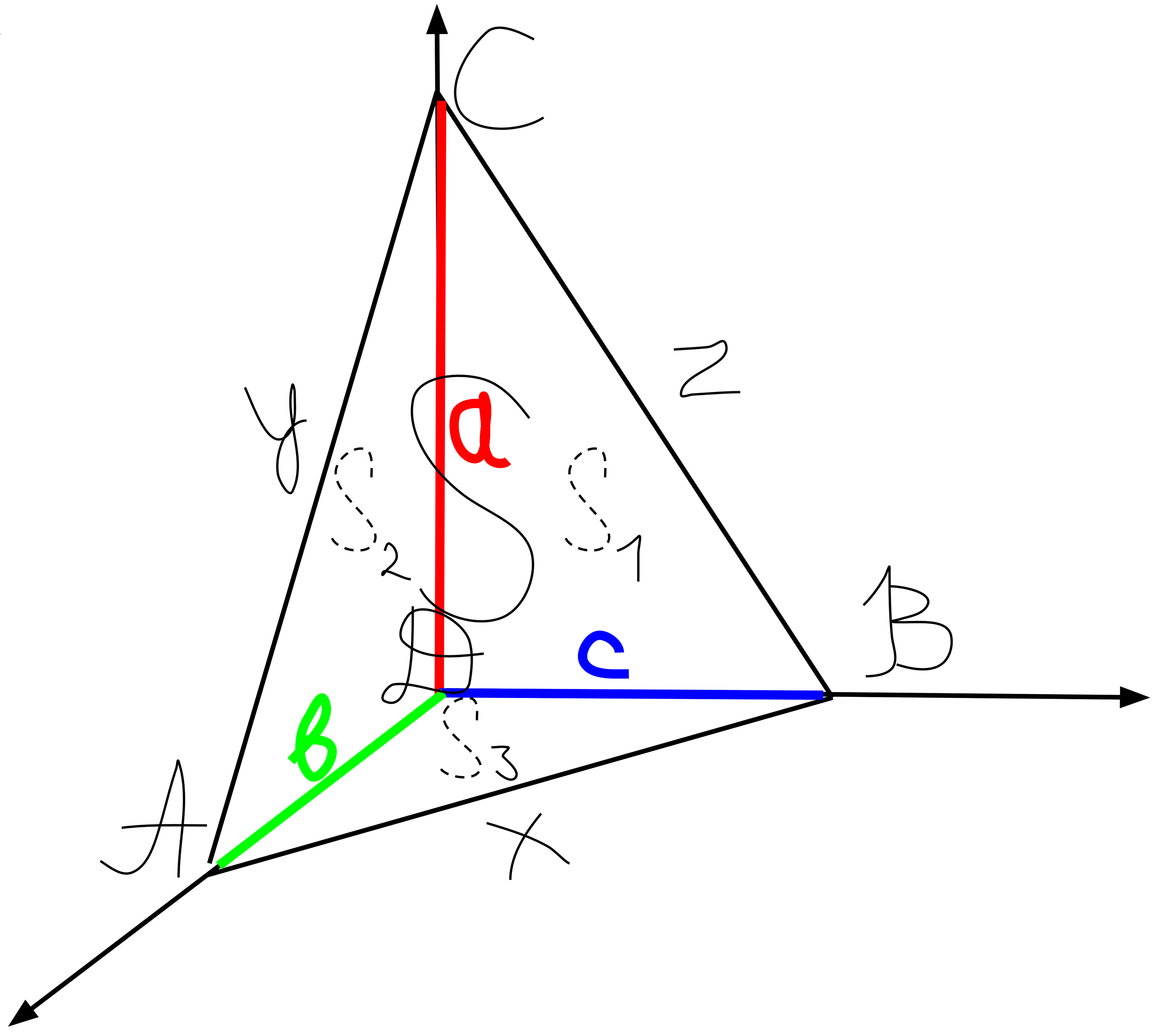
S^2 = (S_1)^2 + (S_2)^2 + (S_3)^2

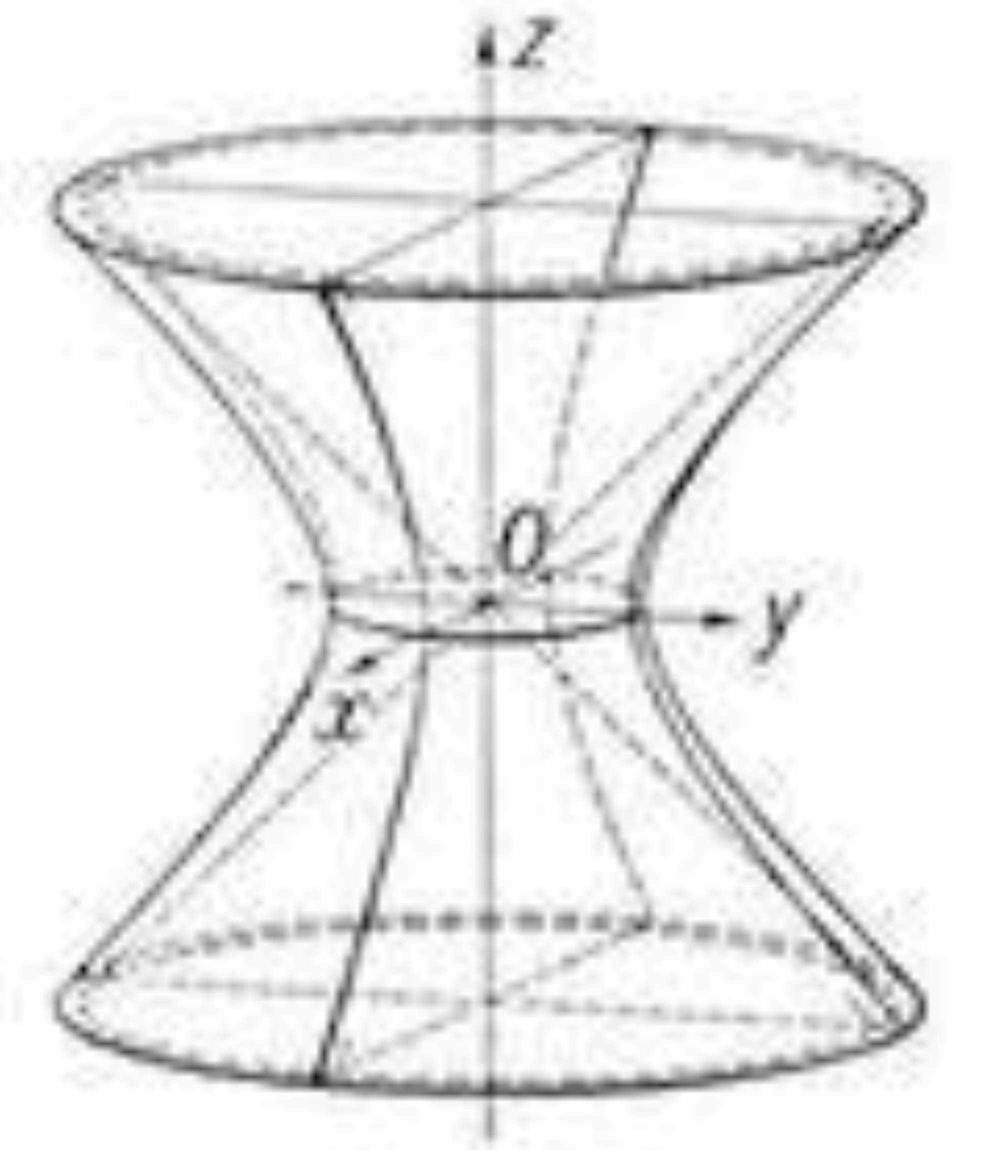
Док-во:
S1=ac/2
S2=ab/2
S3=bc/2
----
p=(x+y+z)/2 S^2=(x+y+z)/2*(x+y+z-2y)/2*(x+y+z-2x)/2*(x+y+z-2z)/2=
(x+y+z)/2*(x-y+z)/2*(-x+y+z)/2*(x+y-z)/2=(x+y+z)*(x+y-z)*(x-y+z)*(-x+y+z)/16=
=((x+y)^2-z^2)*(x-y+z)*(-(x-y)+z)/16=((x+y)^2-z^2)*(z^2-(x-y)^2)/16
(x^2+2xy+y^2-z^2)*(z^2-x^2+2xy-y^2)/16=(x^2z^2-x^4+2x^3y-x^2y^2+2xyz^2-2
x^3y+4x^2y^2-2xy^3+y^2z^2-x^2y^2+2xy^3-y^4-z^4+x^2z^2-2xyz^2+y^2z^2)/1
6=(2x^2z^2-x^4+2x^2y^2+2y^2z^2-y^4-z^4)/16=(2(b^2+c^2)(a^2+c^2)+2(b^2+
c^2)(a^2+b^2)+2(a^2+b^2)(a^2+c^2)-(b^2+c^2)^2-(a^2+b^2)^2-(a^2+c^2)^2)/1
6=(2a^2b^2+2c^4+2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2+2b^4+2a^2c^2+2b^2c^2+2a^4
+2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-b^4-2b^2c^2-c^4-a^4-2a^2b^2-b^4-a^4-2a^2c^2-
c^4)/16=(4a^2b^2+4b^2c^2+4a^2c^2)/16=(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)/4

x^2=b^2+c^2
y^2=a^2+b^2
z^2=a^2+c^2

S1^2=a^2c^2/4
S2^2=a^2b^2/4
S3^2=b^2c^2/4

S(a,b,c)=V[p(p-a)(p-b)(p-c)] p=(a+b+c)/2





Гиперболическая геометрия

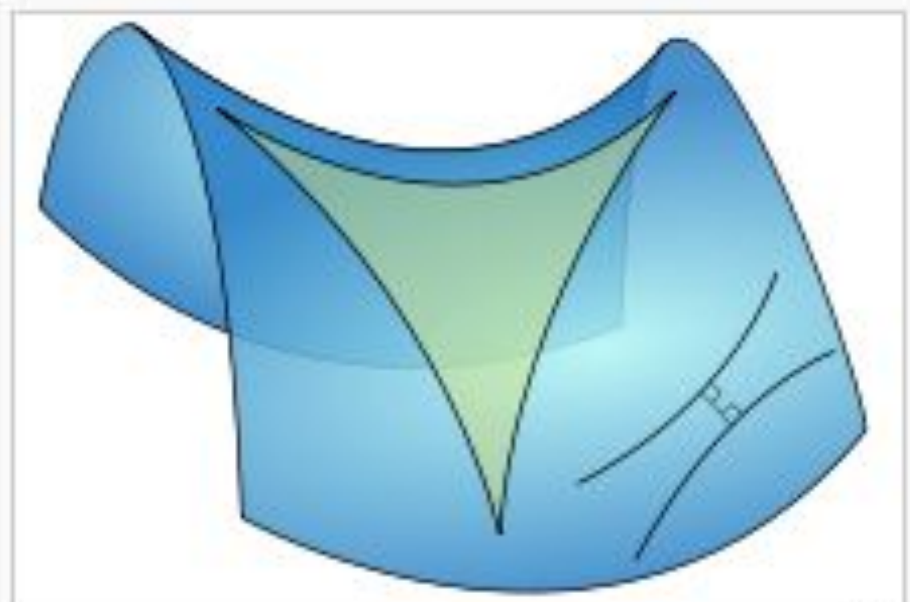
Для прямоугольного треугольника в гиперболической геометрии со сторонами *a*, *b*, *c*, если сторона *c* расположена напротив прямого угла, соотношение между сторонами будет такое[25]

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$$

где ch — гиперболический косинус[26]. Эта формула является частным случаем гиперболической теоремы косинусов, которая справедлива для всех треугольников:[27]

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos\gamma ,$$

где γ — это угол, вершина которого противоположна стороне *c*.


Гиперболический треугольник

Используя ряд Тейлора для гиперболического косинуса $\operatorname{ch} x \approx 1 + x^2/2$ можно доказать, что если гиперболический треугольник уменьшается (то есть, когда *a*, *b*, и *c* приближаются к нулю), то гиперболические соотношение в прямоугольном треугольнике приближаются к теореме Пифагора.